Сосредоточенность 25 % всех студентов Украины в г. Киев и соответственно всех кадров высшей научной квалификации позволило иметь здесь наивысший уровень эффективности экономики (2,46) даже в сравнении с признанными в стране экономическими лидерами среди регионов Днепропетровской (1,99), Донецкой (1,6), Одесской (1,66), Полтавской (1,62), Запорожской (1,52) и Харьковской (1,51) областями.

Основными путями, приемлемыми для всех регионов, по созданию экономики, основанной на знаниях на ближайшие 5 – 10 лет в Украине вполне предсказуемо могут стать мероприятия по актуализации знаний и компетенций в ВУЗах, НИИ и на предприятиях:

повышение удельного веса профессорско-преподавательского состава, имеющего научную степень докторов и кандидатов наук, до 50 – 70 % от общего их количества;

достижение к 2015 г. удельного веса наемных работников, обучившимся новым профессиям и специальностям – 5 %, и повысивших квалификацию – 40 %, а к 2020 г. – 10 % и 60 % соответственно;

увеличение числа наемных работников в сравнении с 2010 г. к 2015 г. на 25 %, а к 2020 г. – еще на 25 %;

увеличение числа выпускников ПТУЗ к 2015 г. на 20 % и к 2020 г. еще на 20 %;

обеспечение развития парка вычислительной техники во всех регионах к 2015 г. до уровня 2010 г. в Днепропетровской, Одесской и Запорожской областей, а к 2020 г. – до уровня 2010 г. в г. Киев;

повышение объема НТР в 2015 г. до 2 % от ВРП, а в 2020 г. – до 3 % от ВРП в каждом регионе на основе создания гибких временных научных подразделений в каждом ВУЗе.

Литература

1. Морган К. Великобритания: знания обеспечивают развитие / К. Морган // Государственное управление в переходных экономиках. Журнал программы LGI. – 2005. – Зима. – 56 с.

2. Статистичний щорічник. Україна у цифрах за 2009 рік. – К.: ІАА, 2010. – 567 с.

3. World Factbook; Central Intelligence Agency [Электронный ресурс] Washington, 2008. – Режим доступа: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2004rank.html

4. Статистичний щорічник Автономної Республіки Крим за 2009 рік. – Сімферополь: ГУС в АРК, 2010. – 559 с.

339 658.8;519.233.6

Белов В.Т., д.ф.-м.н.,
Гапонов А.И., к.ф.-м.н., КЭИ КНЭУ,
Чумаков А.И., старший специалист «Приватбанк»

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МЕТОДИКА КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ ЭКСПЕРТОВ

В экономических методах анализа и оценки тех или иных экономических факторов и бизнес-планов часто не возможна математическая формализация ряда экономических показателей, не имеющих количественной формы, или таких, математическая формализация которых очень сложна. Именно в таких важных случаях с успехом используется экспертный метод, сущность которого основана на оценке экспертами важности тех или иных экономических показателей путем их ранжирования. Количественная сторона при присвоении рангов факторов основывается на методах ранговых критериев Спирмена и Кенделла или в случае многих экспертов используется коэффициент конкордации (согласования) W Кенделла [1]. Однако при математической формализации задачи в качестве количественной оценки согласия мнений экспертов они выбрали не стандартную статистическую дисперсию, а частную количественную характеристику – число инверсий отдельных рангов экономических факторов от истинного расположения рангов. Как известно, по выборке из ограниченного числа экспертов нельзя без погрешности найти истинное положение рангов факторов и только в одном случае, когда теоретически можно дать истинное положение рангов при бесконечном числе экспертов, мнения которых абсолютно противоречивы друг другу, такое расположение факторов можно найти. Согласно [1] в этом случае значения рангов всех факторов равны друг другу, так что ранги отдельных факторов даются равномерным распределением. Отличие фактического положения рангов факторов от равномерного распределения можно легко определить, используя хи-квадрат критерий Пирсона, что и сделано в [1] для коэффициента конкордации W.

В случае двух экспертов используется методика Спирмена или Кенделла, основанная на коэффициенте корреляции r [2]. Основным нареканием по поводу использования методов Спирмена и Кенделла является то, что за истинное положение рангов принимается мнение одного из экспертов и вычисляется коэффициент корреляции. Согласно [2] коэффициент корреляции принимает значение $-1 \le r \le 1$. Поэтому, когда мнения экспертов по положению рангов факторов противоположны, т.е. мнения двух экспертов полностью не согласованы, значение коэффициента корреляции $r = -1$, что и показано в табл. 1.

Таблица 1

Рассогласованность мнений экспертов

Эксперт	фактор			
	1	2	…	n
1 эксперт	1	2	…	n
2 эксперт	n	n-1	…	1
Среднее по экспертам	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	…	$\frac{n+1}{2}$

В то же время, если рассматривать коэффициент конкордации для случаев двух экспертов, имеем $W = 0$.

Совершенно ясно, что между коэффициентами корреляции мнений экспертов r и коэффициентом согласования мнений экспертов W имеется качественное отличие: эти две величины различны. Понятно, что качественная величина «согласованность мнений экспертов» может изменяться от полной согласованности до полной рассогласованности мнений, т.е. от 0 до 100%. Именно поэтому необходимо прекратить использование методов Спирмена и Кенделла для количественной оценки степени согласованности мнений экспертов.

Итак, для оценки согласованности мнений экспертов необходимо использовать только коэффициент конкордации W. Теоретической основой для определения значимости, полученного по выборке мнений экспертов служит гипотеза о равномерном законе распределения средних рангов при случайной расстановке рангов экспертами. К сожалению, применение метода проверки статистических гипотез даже в случае простейшего хи-квадрат критерия Пирсона требует большого объема выборки (n>60), что дает математически некорректным его применение к малым выборкам, составляющим большую часть экспертных исследований.

Поэтому актуальной становится разработка универсальной методики количественной оценки согласованности мнений экспертов на основе строгих методов математической статистики.

Положим, что мнение эксперта представляют собой случайный вектор в n-мерном пространстве факторов, координаты конца которого есть ранги, данные экспертом. Тогда, мнение всех экспертов, представляющие собой случайные векторы, непрерывным образом заполняют некоторую область n-мерного пространства. Особенностью этой области n-мерного пространства является то, что она образована случайными векторами, длина которых одинакова, так как ранги (координаты конца вектора) представляют собой члены суммы в формуле длины вектора:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2} \qquad (1)$$

Как известно, от перестановки членов суммы ее величина не меняется, поэтому случайные вектора имеют одинаковую длину. Этот факт приводит к тому, что концы всех случайных векторов располагаются на какой-то части поверхности гиперсферы радиуса d в n-мерном пространстве факторов.

Как обычно, введем в этом пространстве метрику, определив расстояние между двумя точками i и j n-мерного пространства ρ_{ij} даваемое следующей формулой:

$$\rho_{ij} = \sqrt{(r_{1j} - r_{1i})^2 + (r_{2j} - r_{2i})^2 + \ldots + (r_{nj} - r_{ni})^2} \qquad (2)$$

где: $r_{1i}, r_{2i}, \ldots r_{ni}$ - ранги i-го эксперта, а $r_{1j}, r_{2j}, \ldots r_{nj}$ - ранги j-того эксперта.

Тогда, математически корректно определять количественно согласованность мнений экспертов по величине расстояния между точками, отражающими мнение эксперта, по аналогии с ε-окрестностью точки. В этом случае математическая формализация задачи производится следующим образом. Так как истинное распределение рангов факторов неизвестно, то за него примем положение среднего вектора $\bar{r}$ выборки случайных векторов, которое введем обычным методом математической статистики.

Координаты этого вектора в случае m экспертов и n факторов определяются стандартным образом по формулам:

$$\bar{r}_1 = \frac{\sum r_{1j}}{m}; \bar{r}_2 = \frac{\sum r_{2j}}{m}; .... \bar{r}_n = \frac{\sum r_{nj}}{m} \tag{3}$$

Таким образом, средний выборочный вектор r можно записать так: $\bar{r}\left(\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_n\right)$.

Найдем все расстояния ρ_{jc} между концами среднего вектора $\bar{r}$ и концами r_{nj} всех остальных векторов, представляющих мнения отдельных экспертов по формуле:

$$\rho_{jc} = \sqrt{\left(r_{1i} - \bar{r}_1\right)^2 + \left(r_{2i} - \bar{r}_2\right)^2 + ... + \left(r_{ni} - \bar{r}_n\right)^2} \tag{4}$$

Будем теперь рассматривать расстояния ρ_{je} как абсолютные погрешности Δx_i какой-то случайной величины X. Согласно [2] найдем исправленную выборочную дисперсию этой случайной величины X по формуле:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \rho_{jc}^2}{m-1} \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда все эксперты распределили ранги одинаковым образом, т.е. случай абсолютного согласования мнений экспертов. Тогда, согласно формулам (3) и (4) все расстояния $\rho_{jc} \equiv 0$ и дисперсия $S_0^2 = 0$ в этом предельном случае.

Во втором предельном случае, когда все эксперты ставят ранги факторам случайным образом, имеем, что средние ранги равны друг другу, т.е. $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = ... = \bar{r}_n$ и находятся по формуле:

$$\bar{r}_c = \bar{r}_j = \frac{1+2+3+...+n}{n} = \frac{n+1}{2} \tag{6}$$

Рассчитаем по формуле (4) все расстояния ρ_{jc} в этом случае. Для этого примем, что истинное расположение рангов будет $r_n(1,,2,3,4,5,...,n)$.

Согласно формуле (4) будем иметь:

$$\rho_{jc} = \sqrt{\left(1 - \bar{r}_c\right)^2 + \left(2 - \bar{r}_c\right)^2 + ... + \left(n - \bar{r}_c\right)^2} \tag{7}$$

Так как сумма не меняется от перестановки ее членов, то полученная величина не зависит от того, какой именно случайный вектор является истинным. Тогда, дисперсия генеральной совокупности будет равна:

$$\delta_{СГ}^2 = \frac{\left(1 - \bar{r}_c\right)^2 + \left(2 - \bar{r}_c\right)^2 + ... + \left(n - \bar{r}_c\right)^2}{k = n-1} \tag{8}$$

где: $k = n - 1$ число степеней свободы, учитывающее линейную зависимость факторов.

Вследствие того, что $\bar{r}_c$ оцениваться по бесконечной совокупности экспертов, то величина дисперсии генеральной совокупности является инвариантной относительно положения истинного вектора рангов и, кроме того, является максимальной среди всех возможных дисперсий S_C^2, т.е. справедливо соотношение $S_0^2 = 0 \le S_I^2 \le \delta_{СГ}^2$. Покажем, что это действительно так. Очевидно, что максимально возможная величина разности во мнениях экспертов будет, когда их мнения полностью рассогласованы, т.е. пусть мнения 1-ой половины экспертов совпадают между собой, а мнения 2-ой половины экспертов полностью противоположны им. В этом случае средние ранги всех факторов также будут равны друг другу и равны:

$$\bar{r}_c = \frac{1+n}{2} = \frac{2+n-1}{2} = \frac{3+n-2}{2} = ... \frac{n+1}{2} \tag{9}$$

Таким образом, случай, когда первая половина экспертов и вторая половина экспертов имеют противоположные мнения, идентичен случаю, когда все эксперты ставят ранги факторам случайным образом. Т.е. максимально возможна величина разности мнений экспертов и есть случай, когда все ранги равны друг другу. Итак, действительно дисперсия S_i^2 является монотонно возрастающей функцией ограниченной пределом $0 \le S_i^2 \le \delta_{СГ}^2$.

Полученный результат показывает количественно оценивать степень согласования мнений экспертов по величине дисперсии, даваемой формулой (5). Совершенно ясно, что по стандартным методикам [2] используя t критерий Стьюдента можно оценивать статистически значимое $S_0^2 \ge 0$ или используя F критерий Фишера оценить равенство $S_i^2 \le \delta_{СГ}^2$.

Так как $0 \le S_i^2 \le \delta^2$ и является монотонно возрастающей функцией то для вычисления коэффициента конкордации W можно получить следующую формулу, учитывая что $0 \le W \le 1$:

$$W = 1 - \frac{S_i^2}{\delta^2} \tag{10}$$

Рассмотрим конкретный пример применения рассмотренной методики. Пусть мнения экспертов даются следующей табл. 2.

Таблица 2

Ранжирование факторов экспертами

Эксперт	фактор				
	1ф	2ф	3ф	4ф	5ф
1	3	2	1	4	5
2	5	4	2	1	3
3	5	3	1	2	4
4	5	2	1	3	4
5	5	2	1	4	3
6	4	1	1	3	5
7	5	3	2	2	4
8	5	2	1	4	3
9	5	4	1	1	3
10	5	4	2	2	3
Среднее	4.7	2.7	1.3	2.6	3.7

Найдем координаты конца среднего выборочного вектора $\overline{r}$. рассчитаем все расстояния ρ_{ic} между концами среднего вектора $\overline{r}$ и концами $\overline{r}_{nj}$ всех остальных векторов, представляющих мнения отдельных экспертов, по формуле (4). Рассмотрим, как конкретно рассчитать ρ_{ic} на примере первого эксперта.

$$\rho_{ic} = \sqrt{(3-4.7)^2 + (2-2.7)^2 + (1-1.3)^2 + (4-2.6)^2 + (5-3.7)^2} = 2.65$$

Результаты расчетов для всех экспертов представим в табл. 3, и по результатам расчетов найдем по формуле (5) исправленную выборочную дисперсию.

$$S_i^2 = \frac{3.7863}{10-1=9} = 0.4207$$

Таблица 3

Расчет исправленной выборочной дисперсии

Эксперт	ρ_i	$\rho_i - \overline{\rho}$	$(\rho_i - \overline{\rho})^2$
1	2.65	0.88	0.7744
2	2.31	0.54	0.2916
3	0.75	-1.02	1.0404
4	0.96	-0.81	0.6561
5	1.77	0.00	0.0000
6	2.31	0.54	0.2916
7	1.06	-0.71	0.5041
8	1.93	0.16	0.0256
9	2.22	0.45	0.2025
10	1.77	0.00	0.0000
Среднее	$\overline{\rho} = 1.77$	$\sum =$	3.7863

Найдем по формуле (8) дисперсию генеральной совокупности:

$$\delta^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5-1=4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

По формуле (10) найдем коэффициент конкордации:

$$W = 1 - \frac{0.4207}{2.5} = 1 - 0.17 = 0.83$$

Найдем наблюдаемое значение $\chi^2_{наб}$ критерия Пирсона по формуле:

$$\chi^2_{наб} = n(m-1) \cdot W = 5(10-1) \cdot 0.83 = 37.35$$

Найдем по таблице критических точек распределения χ^2 для $\alpha = 0.05$ и $k = m-1$ $\chi^2_{кр} = 16.9$ так как $\chi^2_{наб} > \chi^2_{кр}$, то коэффициент конкордации значим.

Согласно [3] положение любого вектора в полярной системе координат можно определить каким-то углом φ. Покажем, каким образом в многомерном пространстве определить этот обобщенный угол.

Рассмотрим основные теоретические соображения, положенные в основу нового статистического критерия. Пусть имеется бесконечная генеральная совокупность экспертов. Каждый из экспертов случайным образом ставит свое возможное значение ранга каждому из m ранжируемых факторов. Тогда ранг фактора является дискретной случайной величиной X, возможное значение которой равны: 1, 2, 3, …., m. Так как эксперты ставят ранги случайным образом, то все возможные значения дискретной случайной величины являются равновозможными с вероятностью $p_i = \frac{1}{m}$.

Математическое ожидание ранга каждого из m факторов равны между собой и равны:

$$M(x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i = \frac{1+2+3+...+m}{m} \qquad (11)$$

Так как ранги факторов одинаковы, то закон распределения этой дискретной случайной величины является равномерным и показан на рис. 1а.

В другом крайнем случае, когда все эксперты генеральной совокупности ставят один и тот же ранг каждому из m факторов, возможные значения этой дискретной случайной величины X будут различными и иметь следующие значения:

$$M(x_i) = 1, \quad M(x_i) = 2, \quad M(x_i) = 3, \; \dots \; M(x_m) = m \qquad (12)$$

Тогда, при полной согласованности мнений экспертов закон распределения дискретной случайной величины X в виде многоугольника распределения выглядит так, как показано на рис.1б.

Таким образом, с точки зрения математической статистики, задача количественной оценки согласованности мнений экспертов сводится к проверке отличия эмпирического закона распределения выборки от теоретического закона даваемого рис. 1а. или 1б.

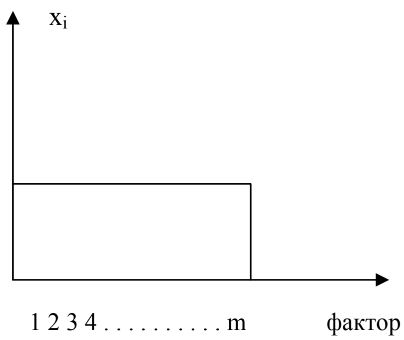

Рис. 1а. Теоретический закон распределения при полной рассогласованности мнений экспертов

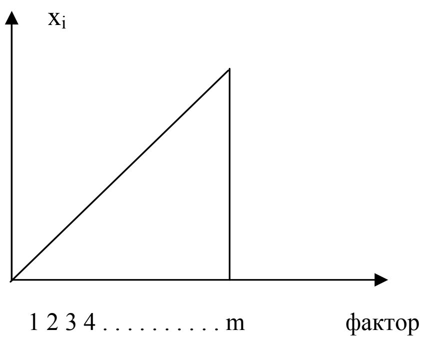

Рис. 1б. Теоретический закон распределения в случае полной согласованности мнений экспертов

Примем, что оба теоретических закона распределения это отрезки прямых с заранее известным расположением их концов. Учет этого обстоятельства позволяет ввести следующий критерий согласованности мнений экспертов. Совместим на одном графике горизонтальный и наклонный отрезки графиков 1а. и 1б. как это показано на рис. 2. Тогда положение одного отрезка относительно другого можно характеризовать углом γ_0. Эмпирическое мнение i-того фактора может быть представлено отрезком, расположенным под углом γ_i, как это показано на рис. 2. При такой формулировке задачи совершенно ясно, что проблема согласованности мнений экспертов сводится к частному случаю известной в теории вероятностей задаче Бюффона о случайном бросании иголки (отрезка) на систему параллельных прямых [4].

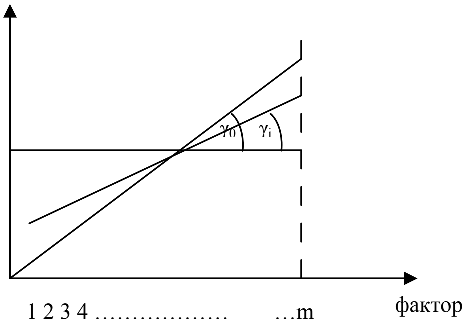

Рис. 2. Совмещение двух теоретических законов распределения

Дополнительным ограничением в этом частном случае задачи Бюффона является то, что концы i-того отрезка всегда должны лежать на оси X_i и прямой рангов m. Это условие автоматически приводит к тому, что длина i-того отрезка является функцией угла γ_i. Так как максимальный угол γ_0 зависит от принятого масштаба по оси x_i и оси рангов, то по этим осям примем одинаковый масштаб, что сразу дает $\gamma_0 = 45^0$. Возможные значения угла γ_i тогда представляют заштрихованные области на рис.3.

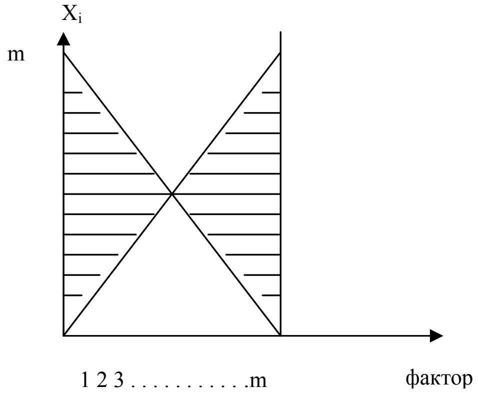

Рис. 3. Возможные значения угла γ_i.

Итак, для предложенного масштаба положение отрезка, характеризующего мнение отдельного эксперта относительно теоретического закона распределения, полностью характеризуется углом γ_i, который изменяется от 0^0 до $\pm\ 45^0$. Исходя из аналитической геометрии, дифференциального исчисления [3], и удобств пользования, в качестве нового критерия согласованности мнений экспертов выгодно взять не сам угол γ_i, а $tg\gamma_i$. Поскольку максимальный угол $\gamma_0 = \pm 45^0$ и соответствует теоретическому закону распределения на рис. 1б, то $tg45^0 = 1$, а минимальному углу $\gamma_{min} = 0^0$ соответствует значение $tg0^0 = 0$. Таким образом, критерий согласования как это и принято изменяется от 0 до 1.

Значения $tg\gamma_i$, учитывая его статистический характер и симметричность возможных значений относительно точки перегиба, необходимо находить методом, предложенным одним из авторов статьи, поскольку этот метод требует только симметричности закона распределения ошибок, что имеет место в этом случае. В соответствии с работой [5] имеем такую формулу для вычисления $tg\gamma_i$:

$$tg\,\gamma = \frac{\sum\limits_{i<j}(x_j - x_i)}{\sum\limits_{i<j}(y_j - y_i)} \qquad (13)$$

Следует рассмотреть практическое приложение вычисления tgγ для мнений экспертов. Расчет для каждого фактора средней величины ранга приведен ранее в таблице 2. Упорядочим факторы по средней величине рангов и получим табл. 4.

Таблица 4

№ п/п	x_i	y_i
1ф	1	1.3
2ф	2	2.6
3ф	3	2.7
4ф	4	3.7
5ф	5	4.7

Необходимо найти $\sum\limits_{i<j}(y_j - y_i)$, т.е. сумму всех возможных разностей между y_i и y_j:

$$\sum_{i<j}(y_j - y_i) = (2.6\text{-}1.3)+(2.7\text{-}1.3)+(3.7\text{-}1.3)+(4.7\text{-}1.3)+(2.7\text{-}2.6)+(3.7\text{-}2.6)+(4.7\text{-}2.6)+(3.7\text{-}2.7)+(4.7\text{-}2.7)+(4.7\text{-}3.7)=15.8$$

Рассчитаем $\sum\limits_{i<j}(x_j - x_i) = (2\text{-}1)+(3\text{-}1)+(4\text{-}1)+(5\text{-}1)+(3\text{-}2)+(4\text{-}2)+(5\text{-}2)+(4\text{-}3)+(5\text{-}3)+(5\text{-}4) = 20$

Далее необходимо рассчитать значения tgγ = 15.8/20 = 0.79. Следует проверить значимость рассчитанного значения коэффициента конкордации tgγ = 0.79.

Для проверки значимости коэффициента конкордации рассчитывается наблюдаемое значение критерия:

$$T_{набл} = \frac{r_B\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-r_B^2}} \qquad (14)$$

По таблице критических точек распределения Стьюдента для данного уровня значимости α и числу степеней свободы k = n – 1, где n – число экспертов, найдем критическую точку $t_{кр}$ (α; k). Если $|T_{набл}| > t_{кр}$, то коэффициент конкордации значим. В нашем случае $T_{набл} = 3.86$, а $t_{кр} = 2$ при α = 0.05, и коэффициент конкордации значим.

Следует отметить, что формула (14) получена для случая линейной связи и нормального распределения ошибок, что не совсем соблюдается в нашем случае и необходимо получить более корректное выражение для $T_{набл}$ чем (14), что уже выходит за рамки данной статьи.

Достоинством предложенной методики количественной оценки согласованности мнений экспертов является ее универсальность, объясняемая использованием стандартной математической статистической величины, а именно дисперсии. Так как дисперсия имеется у любого сколько-нибудь практически значимого закона распределения, то оценка и становится универсальной. Концепция представления эксперта в виде случайного вектора в n-мерном пространстве позволяет математически корректно формализовать статистическую задачу о согласовании мнений экспертов. Данная концепция позволяет создать различные вычислительные варианты определения коэффициента конкордации W как единственного качественного критерия не зависимо от числа экспертов, принявших участие в ранжировании факторов.

Отметим так же, что такая концепция позволяет, используя понятия и методы классической теории вероятностей, оценить не значимость полученного значения коэффициента конкордации W , а именно его вероятность, что существенно меняет саму основу экономико-математического моделирования.

Литература

1. Kendall M.G. The advanced theory of statistic / M.G. Kendall, A. Stuart, Vol. 1, 2, New York, 1958.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособ. для вузов / В.Е. Гмурман. – 10-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 479с.

3. Баврин И.И. Курс высшей математики: учеб. для студентов пед. Ин-тов по спец № 2105 «Физика». – М.: Просвещение, 1992. – 479с.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Главная редакция физико-математической литературы Свешникова А.А. – М.: Наука, 1970, 656с.

5. Белов В.Т. Простой вариант способа внешнего стандарта в рентгеноспектральном флуоресцентном анализе / В.Т. Белов // Заводская лаборатория.- 1977.- № 4.- С. 947-950.