330.131.7

Сигал А.В., к.э.н., доцент,
ТНУ имени В.И. Вернадского, г. Симферополь

ОБ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ КОНКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Конкретная математика как самостоятельная наука возникла во второй половине XX века. Наиболее полное и систематическое изложение основных разделов конкретной математики содержится в книге [1], прообразом которой послужил раздел «Математическое введение» из первого тома [2] многотомной монографии Дональда Эрвина Кнута. Отцы-основатели этой науки Р.Л. Грэхем, Д.Э. Кнут, О. Паташник так объясняют её название: «Конкретная математика — это математические основы информатики, позволяющие применять технику работы с КОНтинуальными (непрерывными) объектами для работы с дискретными объектами». Пользу от информационных приложений конкретной математики иллюстрируют теоретические и практические сведения, а так же многочисленные примеры, приведённые в учебных пособиях [1 – 3]. К сожалению, экономические приложения конкретной математики до настоящего времени практически не рассматривались.

Целью статьи является обоснование возможности применения методов конкретной математики в экономических исследованиях. Заметим, что данное обоснование должно состоять, прежде всего, в рассмотрении конкретных экономических ситуаций. В статье сначала будут приведены необходимые сведения о целочисленных функциях, которые рассматриваются в теории чисел, являющейся важнейшим разделом конкретной математики. Затем будут рассмотрены конкретные экономические задачи, для моделирования которых окажутся полезными некоторые из рассмотренных целочисленных функций.

Целочисленными функциями называют функции $f(x)$, область определения и множество значений которых удовлетворяют соотношениям $x \in D(f) \subseteq \mathbf{R}$, $\boldsymbol{f(x) \in E(f) \subseteq} \mathbf{Z}$, где $\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел, а $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

Простейшей целочисленной функцией является нотация Айверсона $[\boldsymbol{P(x)}]$, равная **1**, если заданное условие $\boldsymbol{P(x)}$ истинно, и равная **0**, если оно ложно. Основными целочисленными функциями являются пол (целая часть или антье) $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$, потолок $\lceil \boldsymbol{x} \rceil$ и ближайшее целое $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ числа $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$. Согласно определениям $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor = \max\{\boldsymbol{n} \mid \boldsymbol{n} \le \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \in \mathbf{Z}\}$, $\lceil x \rceil = \min\{n \mid n \ge x, n \in \mathbf{Z}\}$, $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ — это целое число, ближайшее к заданному числу $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$.

С целочисленными функциями связаны некоторые важные функции, не являющиеся целочисленными. Дробной частью $\{\boldsymbol{x}\}$ числа $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$ называют число равное $\{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{x} - \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$, а расстоянием $\|\boldsymbol{x}\|$ числа $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$ до ближайшего целого числа — число $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x} \rangle| = \min\{\{\boldsymbol{x}\}; \lceil \boldsymbol{x} \rceil - \boldsymbol{x}\}$. Целочисленные и связанные с ними функции имеют многочисленные применения.

Как известно, цепи Маркова используются для моделирования функционирования систем [4 – 7], имеющих $\boldsymbol{n}$ несовместных состояний $\boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_n}$, при этом в фиксированный момент времени эти системы могут или находиться с некоторой вероятностью в любом из этих состояний, или осуществлять переход из одного из этих состояний в другое. Как правило, в таких случаях применяют простую однородную цепь Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. Однако для функционирования экономических систем следует учитывать возможность банкротства, которое, по сути, представляет собой поглощающее состояние. Таким образом, функционирование экономических систем целесообразно моделировать поглощающими цепями Маркова. Далее будет рассмотрена простейшая модель функционирования экономической системы в виде однородной цепи Маркова с двумя состояниями, одно из которых является поглощающим состоянием. Эта простейшая модель функционирования экономической системы позволяет исследовать вопросы, связанные с возможностью банкротства экономической системы.

Рассмотрим экономическую систему, функционирование которой может быть полностью описано $\boldsymbol{n}$ различными состояниями $\boldsymbol{s_1}, \ldots, \boldsymbol{s_n}$. Эту систему можно наблюдать в фиксированные моменты времени $\boldsymbol{t_0 < t_1 < t_2 < \ldots}$ и отмечать её состояние в каждый из этих моментов. Введём следующие обозначения: $p_i(t_k)$ — безусловная вероятность того, что данная система в момент времени t_k находится в состоянии s_i, где $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,\ldots$, $p_{ij}(t_k)$ — условная вероятность перехода данной системы в состояние s_j в момент времени t_k, если известно, что в момент времени t_{k-1} она находилась в состоянии s_i, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,\ldots$, $p(t_k)=(p_1(t_k);\ldots;p_n(t_k))$, где $k=0,1,2,\ldots$, $\pi(t_k)=(p_{ij}(t_k))$ — матрица вероятностей одношагового перехода в момент времени t_k.

Очевидно, для этих вероятностей выполняются следующие свойства:

1. $p_i(t_k)\geq 0$, $i=\overline{1,n}$;
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t_k)=1$, $k=0,1,2,\ldots$;
3. $p_{ij}(t_k)\geq 0$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,\ldots$;
4. $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}(t_k)=1$, $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,\ldots$;
5. $p_j(t_k)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(p_i(t_{k-1})\cdot p_{ij}(t_k)\right)$, $j=\overline{1,n}$, $k=1,2,\ldots$;
6. $p(t_k)=p(t_{k-1})\cdot\pi(t_k)=p(t_0)\cdot\pi(t_1)\cdot\pi(t_2)\cdot\ldots\cdot\pi(t_k)$, $k=1,2,\ldots$

Предположим дополнительно, что цепь Маркова, характеризующая функционирование экономической системы, является однородной, то есть значения условных вероятностей $p_{ij}(t_k)=p_{ij}$, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,\ldots$, не зависят от момента времени t_k, при этом матрица вероятностей одношагового перехода имеет вид $\pi(t_k)=\pi(1)=\pi=(p_{ij})$, матрица вероятностей k-шагового перехода — $\pi(k)=\pi^k=\left(p_{ij}^{(k)}\right)$, а равенство из свойства 6 принимает вид $p(t_k)=p(t_{k-1})\cdot\pi=p(t_0)\cdot\pi(k)=p(t_0)\cdot\pi^k$.

В простейшем случае можно выделить два принципиально разных состояния экономической системы: первое состояние — дефолт, второе — не дефолт. Таким образом, будем считать, что $n=2$. В этом случае матрица вероятностей одношагового перехода имеет вид

$$\pi=\pi(1)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то есть $p_{11}=1$, $p_{12}=0$, $p_{21}=p>0$, $p_{22}=q>0$, где $p+q=1$. Таким образом, первому состоянию (дефолту) соответствует поглощающее состояние.

Вероятности многошаговых переходов характеризуют значения элементов матрицы вероятностей k-шагового перехода:

$$\pi^{(k)}=\begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} \end{pmatrix}=\pi^k. \tag{2}$$

Пользуясь определением произведения матриц, легко найти натуральную степень матрицы (1). Тогда для элементов матрицы (2) получаем формулы:

$$p_{11}^{(k)}=1,\ p_{12}^{(k)}=0,\quad p_{21}^{(k)}=1-q^k,\quad p_{22}^{(k)}=q^k. \tag{3}$$

Из равенства (3) получаем, что вероятность перехода экономической системы за k шагов её функционирования в поглощающее состояние s_1 дефолта равно $p_{21}^{(k)} = 1 - q^k$. Если на соответствующем этапе функционирования экономической системы ей удастся за счёт модернизации избежать своей ликвидации, то значение вероятности (3) перехода экономической системы в поглощающее состояние s_1 дефолта с течением времени будет возрастать, неуклонно приближаясь к числу **1**. Можно предположить, что в случае, когда количество таких отсрочек индивидуальных дефолтов экономических систем превышает некоторое критическое значение, происходит скачкообразный переход всей экономики в состояние подобное Великой Депрессии, когда резко усиливаются все негативные тенденции в мировой экономике.

С учётом справедливости неравенств $0 < q < 1$ получаем такие предельные соотношения:

$$\lim_{k\to+\infty} p_{11}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} 1 = 1, \quad \lim_{k\to+\infty} p_{12}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} p_{21}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \left(1 - q^k\right) = 1,$$

$$\lim_{k\to+\infty} p_{22}^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} q^k = 0, \; \lim_{k\to+\infty} \pi^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} \pi^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, предельная вероятность перехода в поглощающее состояние s_1 (в состояние дефолта) при условии, что функционирование экономической системы началось с непоглощающего состояния s_2, равна $p_1 = \lim\limits_{k\to+\infty} p_{i1}^{(k)} = 1$, поэтому с течением времени объявление любой экономической системой своего дефолта следует считать практически достоверным событием, а сам дефолт — практически неизбежным состоянием экономической системы.

Если задано значение вероятности P, где $0 < P < 1$, то из равенства $1 - q^k = P$ получаем, что наименьшее возможное количество $k(P)$ шагов функционирования экономической системы, для которого выполняется неравенство $p_{21}^{(k)} \ge P$, равно числу $k(P) = \lceil \log_q (1 - P) \rceil = \left\lceil \dfrac{\ln(1 - P)}{\ln q} \right\rceil$, где $\ln x$ — натуральный логарифм, $\lceil x \rceil$ — значение функции потолка числа x.

Пусть $P = 0{,}5$, тогда получаем следующую формулу:

$$k(0{,}5) = \lceil \log_q (1 - 0{,}5) \rceil = \lceil \log_q 0{,}5 \rceil = \left\lceil \frac{\ln 0{,}5}{\ln q} \right\rceil. \tag{4}$$

Если дополнительно задать $p = 0{,}01$, то получим соотношения: $q = 1 - p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$, $k(P) = \left\lceil \dfrac{\ln(1 - P)}{\ln 0{,}99} \right\rceil$, а с учётом формулы (4)

$$k(0{,}5) = \left\lceil \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}99} \right\rceil \approx \lceil 68{,}9676 \rceil = 69.$$

Заметим, что значение $k(0{,}5) = 69$ совпадает с приблизительным значением длительности длинных циклов Кондратьева в **70** лет.

На практике банки управляют кредитными рисками, руководствуясь собственными методами кредитного анализа и оценки кредитоспособности потенциальных заёмщиков. Этот анализ состоит в определении уровней кредитоспособности, платёжеспособности и финансовой устойчивости потенциального заёмщика, что и позволяет принять решение по вопросу выдачи кредита. В кредитном анализе главное внимание уделяется готовности и способности потенциального заёмщика полностью вернуть в указанные сроки кредит, для оценки чего внимательно изучаются особенности потенциального заёмщика, эффективность его экономической деятельности, его кредитная история, текущее финансовое состояние, его возможности и потенциал. Анализ кредитоспособности потенциального заёмщика следует проводить в несколько этапов, особенно, когда потенциальный заёмщик претендует на получение крупного кредита. Оценка кредитоспособности потенциальных заёмщиков должна осуществляться портфельно: по совокупности всех имеющихся претендентов на получение однотипных и близких по величине кредитов.

Как правило, банк проводит комплексный многоэтапный анализ кредитоспособности потенциального заёмщика, вычисляет набранную им общую сумму баллов (скоринговую оценку) и классифицирует потенциальных заёмщиков по группе риска. Однако для лучшего учёта кредитного риска, повышения качества и чувствительности анализа кредитоспособности потенциальных заёмщиков следует ещё учитывать и их относительные репутации (уровни надёжности). Для оценки относительных репутаций можно применять теоретико-игровой метод [8], идея которого была впервые предложена в [9]. Оценка относительных репутаций потенциальных заёмщиков позволяет сформулировать окончательные аргументы для предоставления кредита или для отказа в его выдаче, а также вычислить значение индивидуальной величины процентной ставки в случае выдачи кредита.

Ситуацию принятия кредитных решений можно охарактеризовать следующими составными частями:

1. Множество $\mathbf{I} = \{1; 2; \ldots; k\}$ всех потенциальных заёмщиков данного банка;

2. Множество $\mathbf{S} = \{S_1; S_2; \ldots; S_n\}$ величин всех кредитов, полученных хотя бы одним из рассматриваемых потенциальных заёмщиков, и упорядоченных, например, по возрастанию их значений $S_1 < S_2 < \ldots < S_n$;

3. Матрица $R = R_{k\times n} = (r_{ij})$, (5)

значения элементов r_{ij} которой равны количеству кредитов величиной S_j, полученных i-м потенциальным заёмщиком.

Будем интерпретировать множество заёмщиков, обладающих наибольшим уровнем относительной репутации, как нечёткое множество [10] вида $J = \{(\mu_1/1); (\mu_2/2); \ldots; (\mu_k/k)\}$. Для каждого элемента $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$ этого множества должно быть задано значение функции принадлежности μ_i данному нечеткому множеству J, где $\mu_i \in [0; 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Для вычисления оценок значений функции принадлежности $\mu_i \in [0; 1]$, где $i = \overline{1, k}$, можно решить парную матричную игру с нулевой суммой, заданную матрицей (5). Оценками значений функции принадлежности μ_i будут числа $\mu_i = C \cdot p_i^*$, где p_i^* — это соответствующие компоненты оптимальной стратегии первого игрока $p^* = (p_1^*; p_2^*; \ldots; p_k^*)$, а множитель C подбирается так, чтобы выполнялось равенство $\max\limits_i \mu_i = 1$. В случае, когда матрица (5) известна полностью, данную ситуацию принятия кредитных решений характеризует традиционная антагонистическая игра, заданная в условиях полной информации. А в случае, когда матрица (5) известна частично (то есть не для всех элементов r_{ij} известны их точные истинные значения), данную ситуацию принятия кредитных решений характеризует антагонистическая игра с неполной информацией. Определение оценок значений функции принадлежности $\mu_i \in [0; 1]$ для всех потенциальных заёмщиков и позволяет вычислить значения стоимости выдаваемых им кредитов, то есть величины соответствующих индивидуальных процентных ставок [11].

Пусть имеет место шестая информационная ситуация I_6 [12], когда все неизвестные элементы платёжной матрицы принадлежат заданным нечётким множествам, то есть представляют собой нечёткие переменные с известными функциями принадлежности. В общем виде для элемента, точное истинное значение которого неизвестно, можно записать $r_{ij} \in R_{ij}$, где $R_{ij} = \{(\mu_{ij}^{(1)}/r_{ij}^{(1)}); (\mu_{ij}^{(2)}/r_{ij}^{(2)}); \ldots; (\mu_{ij}^{(L)}/r_{ij}^{(L)})\}$ — известное нечёткое множество,, $r_{ij}^{(l)}$ — заданные возможные значения элемента r_{ij}, точное истинное значение которого неизвестно, $\mu_{ij}^{(l)}$ — соответствующее значение функции принадлежности. В данном случае оптимальное решение исходной антагонистической игры с неполной информацией можно найти при помощи приведения этой игры к традиционной антагонистической игре, заданной в условиях полной информации, при этом значения элементов r_{ij}, точные истинные значения которых неизвестны, можно оценить по формуле

$$\hat{r}_{ij} = \left\langle \frac{\sum_{l=1}^{L}\left(r_{ij}^{(l)} \cdot \mu_{ij}^{(l)}\right)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_{ij}^{(l)}} \right\rangle,$$

где $\langle x \rangle$ — это ближайшее целое число к действительному числу x. Если же не использовать функция ближайшего целого, то окажутся нарушенными свойства элементов платёжной матрицы (5) игры, характеризующей ситуацию принятия кредитных решений.

Методы конкретной математики, являющейся математической основой информатики, целесообразно применять, как в случае использования информационных систем и технологий в экономике, так и в случае математического моделирования экономики.

Одним из важнейших вопросов дальнейших исследований в данном направлении является определение сферы применения конкретной математики в теории и практике экономики.

Литература

1. Грэхем Р.Л. Конкретная математика. Математические основы информатики / Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О.; пер. с англ. и ред. И. В. Красикова. — 2-е изд. — М.: Вильямс, 2009. — 784 с.

2. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 1: Основные алгоритмы / Д. Э. Кнут ; пер. с англ., ред. Козаченко Л. Ф., Тертышного В. Т., Красикова И. В. — 3-е изд. — М.: Вильямс, 2000. — 720 с.

3. Сигал А. В. Конкретная математика. учеб. пособ. для студентов, обучающихся по направлению «Информатика» / А. В. Сигал, Л. Ф. Яценко. — Симферополь: РВУЗ КИПУ, 2007. — 178 с.

4. Жлуктенко В. І. Стохастичні моделі в економіці / В. І. Жлуктенко, А. В. Бєгун. — К.: КНЕУ, 2005. — 352 с.

5. Кемени Дж. Дж. Счетные цепи Маркова / Дж. Дж. Кемени, Дж. Л.Снелл, Э. У. Кнепп.— М.: Наука, 1987 — 414 с.

6. Кемени Дж. Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Дж. Кемени, Дж. Л. Снелл. — М.: Наука, 1970. — 271 с.

7. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы / Э. Нуммелин. — М.: Мир, 1989. — 207 с.

8. Линь Сэнь Оптимизация уровня кредитного риска на основе теоретико-игрового подхода / Линь Сэнь // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2009) : Научные труды III Международной школы-симпозиума АМУР-2009 ; Севастополь, 14 – 20 сентября 2009. — Симферополь: ДЭН, 2009. — С. 157 — 162.

9. Сигал А. В. Матричная модель представления кредитных историй потенциальных заёмщиков / А. В. Сигал // Актуальные проблемы и перспективы развития экономики Украины : материалы VI междунар. научно-практ. конф. ; Алушта, 4 – 6 октября 2007. — Симферополь, 2007. — С. 81 — 82.

10. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и её применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде ; пер. с англ. Н. И. Ринго. — М.: Мир, 1976. — 168 с.

11. Сигал А. В. О совершенствовании управления кредитным риском / А. В. Сигал // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2010) : сборник научных трудов Междунар. школы-симпозиума АМУР-2010 (Севастополь, 13 – 19 сентября 2010). — Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2010. — С. 347 — 353.

12. Сигал А. В. Антагонистическая игра, заданная в условиях частичной неопределенности / А. В. Сигал, В. Ф. Блыщик // Экономическая кибернетика. — 2005. — № 5 – 6 (35 –36). — С. 47 — 53.

Рецензент докт. экон. наук, профессор Апатова Н.В.