за рахунок ефективного використання транспорту, підвищення продуктивності праці, високого рівня маркетингу) – шлях до збільшення прибутку торговельних підприємств споживчої кооперації України. Не менш важливо вести пошуки збільшення величини інших операційних доходів, особливо від операційної оренди необоротних активів чи реалізації необоротних активів, які використовуються неефективно. Перспективним напрямом в дослідженні проблеми балансування витрат, доходів і прибутку є розробка економічно обґрунтованих планів операційних витрат і оптимізація їх структури.

Література

1. Біла О.Г. Фінансове планування і прогнозування : навч. посіб. / О.Г. Біла. – Л.: Компакт-ЛВ, 2005. – 312 с.
2. Мазаракі А.А. Економіка торговельного підприємства : підруч. для ВУЗів / А.А. Мазаракі, Л.О. Лігоненко, Н.М. Ушакова. – К.: “Хрещатик”, 1999. – 800 с.
3. Поддєрьогін А.М. Фінанси підприємств : підруч. / А.М. Поддєрьогін. – К.: КНЕУ, 2000. – 460 с.
4. Бабенко С.Г. Трансформація кооперативних систем у перехідній економіці : монографія / С.Г. Бабенко. – К.: Наукова думка, 2003. – 332 с.
5. Методичні рекомендації зі складання фінансового плану торговельного підприємства: затверджені постановою правління Укоопспілки від 26.12.01 №320. – Київ. – 2001. – 49 с.

Рецензент доктор экон. наук, профессор И.С. Гуцал

336.71

Кондратьєва І.Г., ст. викладач, Кримський економічний інститут КНЕУ імені Вадима Гетьмана, м. Сімферополь

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ФУНКЦІОНУВАННЯ КРЕДИТНОГО ВІДДІЛУ БАНКУ

Поняття систем масового обслуговування пов’язані з таким явищем, як очікування в черзі. Не являються виключенням комерційні банки, яки додають таку послугу, як кредитування. Клієнти банку очікують у черзі на отримання цієї послуги. Будь яка їх частина, дочекавшись, потрапляють у коло клієнтів до отримання кредиту. А друга їх частина випадає зі цього кола, так и не став справжнім клієнтом банку. В наслідок чого банк втрачає клієнта, що в сучасних умовах може буди досить критичним для його стану. Широке коло реальних процесів за своєю внутрішньою структурою є ймовірними. Найширшого визначення щодо використання на практиці набув за останні десятиріччя клас випадкових процесів, які дістали назву марковських ланцюгів. Ланцюги Маркова як математичний апарат дослідження використовуються в працях таких вчених як Жлуктенко В.І., Бєгун А.В. [1, с. 27-71].

В статті розглянуто кредитний відділ комерційного банку як систему обслуговування вимог (запитів), які надходять від позичальників. Поняття систем обслуговування пов’язані з явищем очікування в черзі. Для того, щоб передбачити поведінку системи обслуговування «необхідно побудувати таку математичну модель, за допомогою якої можна було б відтворити всі можливі ситуації, пов’язані з функціонуванням досліджуваної системи» [1, с. 136]. Зокрема, здійснюючи експеримент за допомогою побудованої математичної моделі, можна дістати відповіді на важливі запитання, що пов’язані з ефективністю функціонування досліджуваної системи обслуговування. Процес утворення черг, час, витрачений каналом на обслуговування кожної вимоги, мають випадковий характер. Моделі, яки створені для дослідження таких систем, називають стохастичними. Наприклад, можна застосувати статистичне моделювання систем обслуговування [3, с. 16-59].

Цілю статті є розгляд практичної ситуації: видання кредиту у комерційному банку, та моделювання даної ситуації за допомогою ланцюгів Маркова.

Запити, що надходять від замовників (позичальників), утворюють потік вимог, створюючи при цьому чергу. Розглянемо марковський процес народження-загибелі.

Нехай обсяг черзі дорівнює k одиницям и процес перебуває у стані Q_k. Процес переходу із стану Q_k за малий проміжок часу Δt до стану Q_{k+1} відповідає випадковій події - отримання позику однією одиницею черзі, моделюється пуассонівським процесом із параметром λ_k- інтенсивність отримання позику. Перехід із стану Q_k до стану Q_{k-1} за Δt, таким чином, відповідає випадковій події - відмови позику із певною ймовірністю однієї одиниці черзі, моделюється експоненціальним законом розподілу із параметром μ_k- інтенсивність відмови позику. Також є випадок, коли за проміжок часу Δt процес залишається у стані Q_k, який буде відповідати такій випадковій події, коли із певною ймовірністю черга не зміниться, то б то, ні хто не отримує позик, та ні кому не відмовлятимуть в його отриманні. Ці три можливі переходи процесу за малий проміжок часу Δt можна зобразити імовірнісним графом (рис. 1) [1, с. 129].

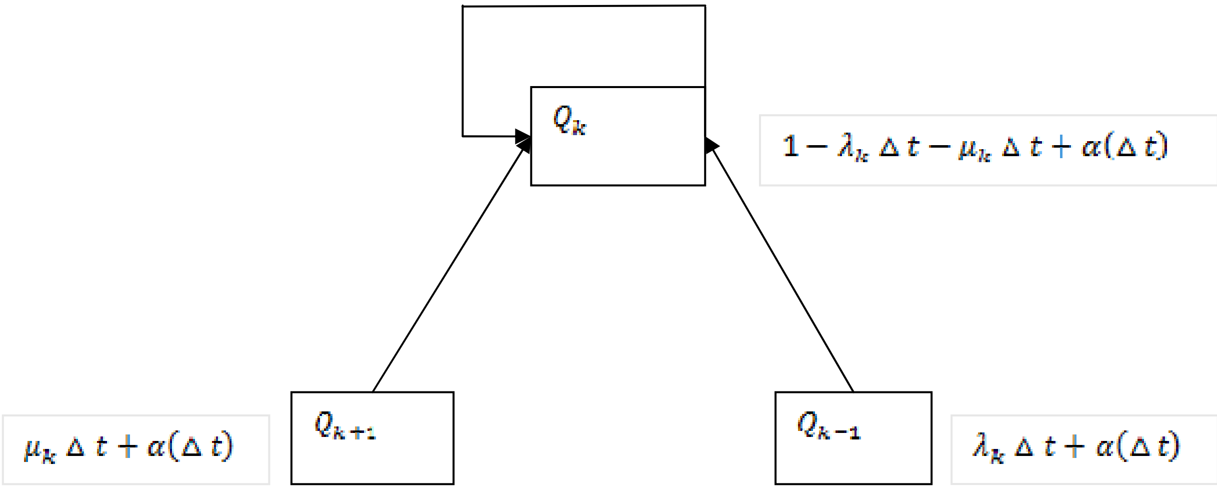

Рис. 1. Процес народження-загибелі

Розглянемо переходи цього процесу до сусідніх станів і відповідні їм імовірності.

Якщо в момент часу t обсяг черзі дорівнював $k+1$ одиницям, то протягом проміжку часу Δt одна одиниця може не отримати позик з імовірністю

$$P_{k+1}(\Delta t)=\mu_{k+1} \Delta t+\alpha(\Delta t) \tag{1}$$

і, таким чином, процес з Q_{k+1} стану з імовірністю (1) перейде в Q_k стан.

Якщо ж в момент часу t обсяг черзі дорівнював $k-1$ одиницям, то протягом часу Δt одна одиниця може отримати позик з імовірністю

$$P_{k-1}(\Delta t)=\lambda_{k-1} \Delta t+\alpha(\Delta t) \tag{2}$$

і, отже, процес з Q_{k-1} стану з імовірністю (1) перейде в Q_k стан.

І якщо в момент в момент часу t обсяг черзі дорівнював k одиницям, а протягом проміжку час Δt у ця кількість не зміниться, то імовірність такого стану буде

$$P_k(\Delta t)=1-\lambda_k \Delta t-\mu_k \Delta t+\alpha(\Delta t), \tag{3}$$

а це вказує на те, що процес перебуваючи в стані Q_k з ймовірністю (3) на протязі часу Δt, у цьому ж стані і залишиться.

Переходи та відповідні їм імовірності зобразімо імовірнісним графом (рис. 2).

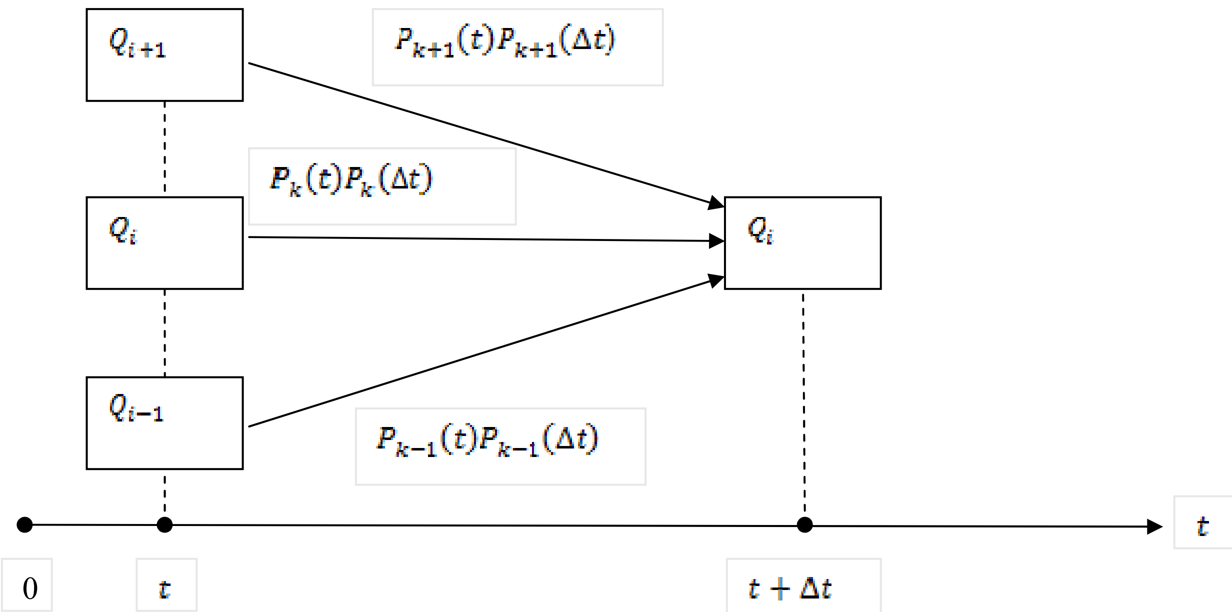

Рис. 2. Переходи та відповідні їм імовірності

Коли $k = 0$, перехід з одного стану черзі до другого буде зображено наступним чином (рис. 3)

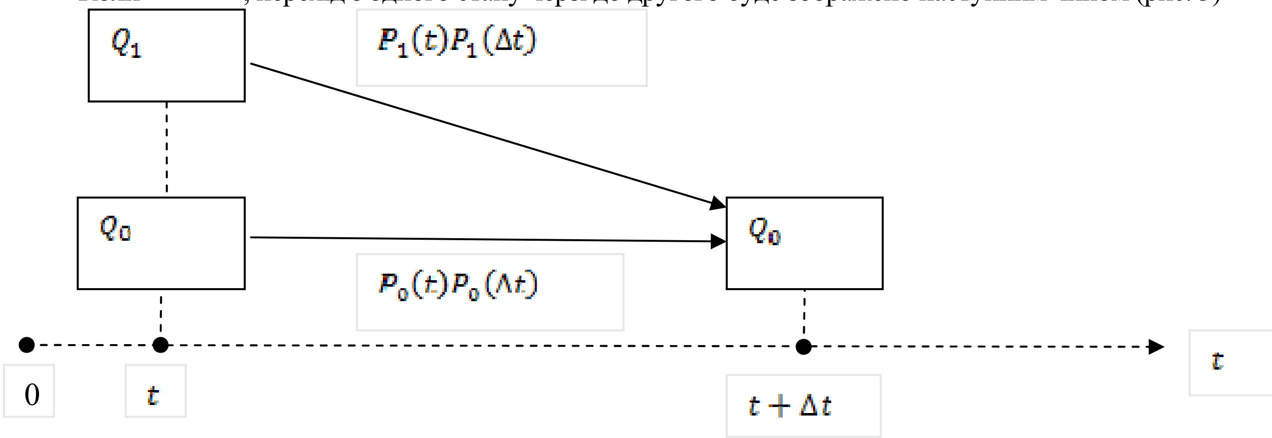

Рис. 3. Переходи та відповідні їм імовірності коли $k = 0$

На основі викладеного, можна одержати таку систему рівнянь [4, С. 129].:

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) + P_1(t)P_1(\Delta t) \\ P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_k(\Delta t) + P_{k+1}(t)P_{k+1}(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_{k-1}(\Delta t), k \geq 1 \end{cases} \qquad (4)$$

При цьому, стан нашої черзі – це повна група подій, то б то

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1. \qquad (5)$$

Маючи на увазі вирази (1)-(3), система (4) набуде такого вигляду

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) - P_0(t)\big(1-\lambda_0 \,\Delta t + \alpha(\Delta t)\big) + P_1(t)\big(\mu_1 \Delta t + \alpha(\Delta t)\big), \\ P_k(t+\Delta t) = P_k(t)\big(1-\lambda_k \,\Delta t - \mu_k \,\Delta t + \alpha(\Delta t)\big) + P_{k+1}(t)(\mu_{k+1} \,\Delta t + \\ \qquad +\alpha(\Delta t)) + P_{k-1}(t)\big(\lambda_{k-1} \,\Delta t + \alpha(\Delta t)\big) \end{cases} \qquad (6)$$

Або

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - \lambda_0 \,\Delta t P_0(t) + P_1(t)\mu_1 \,\Delta t + (P_0(t) + P_1(t))\alpha(\Delta t), \\ P_k(t+\Delta t) = P_k(t) - (\lambda_k + \mu_k)\,\Delta t P_k(t) + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + \\ \qquad +P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} \,\Delta t + (P_k(t) + P_{k+1}(t) + P_{k-1}(t))\alpha(\Delta t) \end{cases} \qquad (7)$$

Необхідно виразити змінення імовірності в проміжок часу від t до $t + \Delta t$, тому маємо

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda_0 \,\Delta t P_0(t) + P_1(t)\mu_1 \,\Delta t + (P_0(t) + P_1(t))\alpha(\Delta t), \\ P_k(t+\Delta t) - P_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k)\,\Delta t P_k(t) + \mu_{k+1} \,\Delta t P_{k+1}(t) + \\ \qquad +P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} \,\Delta t + (P_k(t) + P_{k+1}(t) + P_{k-1}(t))\alpha(\Delta t) \end{cases} \qquad (8)$$

Поділивши ліву і праву частини системи (8) на Δt і переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, одержимо

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1 + \big(P_0(t) + P_1(t)\big) \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t} \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + \\ \qquad +(P_k(t) + P_{k+1}(t) + P_{k-1}(t)) \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t} \end{cases}$$

Враховуючи те, що $\alpha(\Delta t) - \infty -$ малая функція, і $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + P_1(t)\mu_1, \\ \dfrac{dP_k}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} + P_{k-1}(t)\lambda_{k-1}, k = 1,2,\ldots \end{cases} \qquad (9)$$

Ця система рівнянь описує динаміку марковського процесу народження – загибелі. Положимо у системи (9) $\mu_k = \mu = const, \lambda_k = \lambda = const$, одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dfrac{dP_k}{dt} = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \mu P_{k+1}(t) + \lambda P_{k-1}(t), k = 1,2,\dots \end{cases} \tag{10}$$

Отримали так названу модель Ерланга, при $t \to \infty$, одержимо

$$\lim_{t \to \infty} P_0(t) = P_0(\infty) = P_0, \ \lim_{t \to \infty} P_k(t) = P_k(\infty) = P_k;$$

таким чином, імовірності станів не будуть залежать від часу t, а тому

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0.$$

Користуючись цім, перетворюємо систему (10) до вигляду

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ 0 = -(\lambda + \mu)P_k(t) + \mu P_{k+1}(t) + \lambda P_{k-1}(t), k = 1,2,\dots \end{cases} \tag{11}$$

чи

$$\begin{cases} \lambda P_0(t) = \mu P_1(t), \\ (\lambda + \mu)P_k(t) = \mu P_{k+1}(t) + \lambda P_{k-1}(t), k = 1,2,\dots \end{cases} \tag{12}$$

Імовірності P_0, P_k не залежать від зміни часу t, тому вони називаються стаціонарними, та модель (12) також – стаціонарною.

Тепер розглянемо практичну ситуацію: видання кредиту у комерційному банку.

Введемо наступні позначення [2, с. 195]:

$Q(t)$ – довжина черги в момент часу t, тобто загальна кількість позичальників, як тих, що чекають свого обслуговування (потенційні позичальники), так і тих, що отримали кредит, даного банку в момент часу t;

$Q^{оч}(t)$ – кількість потенційних позичальників, що чекають свого обслуговування (надання кредиту) на момент часу t;

$Q^{от}(t)$ – кількість потенційних позичальників, що отримали позику в момент часу t;

$Q^{нот}(t)$ – кількість потенційних позичальників, яким банк відмовив в обслуговуванні (в наданні кредиту) в момент часу t;

$Q^{об}(t)$ – кількість позичальників, що отримали кредит раніше та на момент часу t ще не погасили заборгованість;

W_n – час очікування свого обслуговування n-м потенційним позичальником, тобто час від моменту подання до банку заяви про надання кредиту до моменту його отримання або прийняття банком рішення про відмову в наданні кредиту;

T_n – термін залучення депозиту для n-го потенційного позичальника, тобто час від дати отримання кредиту до дати погашення (період у добах, на який банк надає кредит даному клієнтові);

s_n – величина основної суми кредиту, на яку очікує n-й потенційний позичальник;

S_n – величина основної суми кредиту, що надано n-му потенційному позичальнику;

R_n – відсоткова ставка кредиту, що надано n-му потенційному позичальнику;

C_n – загальна сума, яку отримує банк у майбутньому від n-го потенційного позичальника;

P_n – імовірність того, що n-й потенційний позичальник поверне банку наданий йому кредит у повному обсязі в назначений строк.

Упорядкування потенційних позичальників банку здійснюється за наступними правилами: нехай t_1, t_2 – моменти часу подання заяв про надання кредиту від певних потенційних позичальників, n_1, n_2 – порядкові номери цих потенційних позичальників, тоді

1. $n_1 < n_2$, якщо $t_1 < t_2$;
2. $n_1 < n_2$, якщо $t_1 = t_2$ та $s_{n_1} < s_{n_2}$;
3. $n_1 < n_2$, якщо $t_1 = t_2$, $s_{n_1} = s_{n_2}$ та $S_{n_1} < S_{n_2}$;
4. $n_1 < n_2$, якщо $t_1 = t_2$, $s_{n_1} = s_{n_2}$, $S_{n_1} = S_{n_2}$ та $R_{n_1} < R_{n_2}$;
5. $n_1 < n_2$, якщо $t_1 = t_2$, $s_{n_1} = s_{n_2}$, $S_{n_1} = S_{n_2}$, $R_{n_1} = R_{n_2}$ та $T_{n_1} > T_{n_2}$.

Якщо $t_1 = t_2$, $s_{n_1} = s_{n_2}$, $S_{n_1} = S_{n_2}$, $R_{n_1} = R_{n_2}$, $T_{n_1} = T_{n_2}$, то цих потенційних позичальників можна впорядкувати за лексикографічними принципами.

Домовимося також, що у випадку, коли банк прийняв рішення про відмову в наданні кредиту n-му потенційному позичальнику, то мають місто рівняння $T_n = 0$, $S_n = 0$, $R_n = 0$, $C_n = 0$.

Слід зазначити, що $Q(t)$, $Q^{оч}(t)$, $Q^{от}(t)$, $Q^{нот}(t)$, $Q^{об}(t)$ – це випадкові процеси з неперервним часом та дискретними станами, W_n, C_n, P_n – це випадкові величини, T_n, s_n, S_n, R_n – детерміновані величини, значення яких відомі на момент прийняття банком рішення про надання кредиту n-му потенційному позичальнику.

Крим того, виконуються такі співвідношення:

$$Q(t) \geq 0,\ Q^{оч}(t) \geq 0,\ Q^{от}(t) \geq 0,\ Q^{нот}(t) \geq 0,\ Q^{об}(t) \geq 0, \tag{13}$$

$$Q(t) \in \mathbf{Z},\ Q^{оч}(t) \in \mathbf{Z},\ Q^{от}(t) \in \mathbf{Z},\ Q^{нот}(t) \in \mathbf{Z},\ Q^{об}(t) \in \mathbf{Z}, \tag{14}$$

$$Q(t) = Q^{оч}(t) + Q^{от}(t) + Q^{нот}(t) + Q^{об}(t), \tag{15}$$

$$W_n \geq 0,\ T_n \geq 0,\ s_n > 0,\ S_n \geq 0,\ R_n \geq 0,\ C_n \geq 0, \tag{16}$$

$$S_n \leq s_n,\ 0 < P_n < 1. \tag{17}$$

Якщо n-й потенційний позичальник поверне банку наданий йому кредит у повному обсязі в назначений строк та за умов начислення простих відсотків, то маємо рівняння

$$C_n = S_n \cdot \left(1 + R_n \cdot \frac{T_n}{365}\right) \tag{18}$$

Таким чином, критерій економічної ефективності системи надання кредиту n-му потенційному позичальнику

$$E = \lambda P_n C_n T$$

Безумовно, практичний інтерес становить робота кредитного відділу банку в стаціонарному (стабільному) режимі, коли його функціонування не залежить від часу t. Існування стаціонарного режиму функціонування системи обслуговування формально зазначає певні властивості відповідного випадкового процесу при $t \to +\infty$ або $n \to +\infty$, тобто існують скінчені границі $\lim_{t\to+\infty} Q(t) = Q$, $\lim_{t\to+\infty} Q^{оч}(t) = Q^{оч}$, $\lim_{t\to+\infty} Q^{от}(t) = Q^{от}$, $\lim_{t\to+\infty} Q^{нот}(t) = Q^{нот}$, $\lim_{t\to+\infty} Q^{об}(t) = Q^{об}$, $\lim_{n\to+\infty} W_n = W$, $\lim_{n\to+\infty} P_n = P$.

Література

1. Жлуктенко В. І. Стохастичні моделі в економіці: монографія / В.І. Жлуктенко, А.В. Бєгун. – К.: КНЕУ,2005. – 352 с.
2. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, Коваленко И.Н. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
3. Жлуктенко В.І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології та екології / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ,2002. – 226 с.
4. Жлуктенко В. І. Практикум в теорії ймовірностей і математичної статистики: навч. посіб. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, В.В. Вітлінський. – К.: ІЗМН, 1996. - 328 с.

Рецензент доктор экон. наук, профессор С.П. Наливайченко